
Développements Limités

Convention On désignera par la même lettre ϵ toute fonction tendant vers 0 en 0.

Calculs usuels

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions dont le $DL_1(0)$ est donnée par

$$f(x) = 1 + 3x + x\epsilon(x) \quad g(x) = 2 + x + x\epsilon(x)$$

a) Donner le $DL_1(0)$ des fonctions suivantes :

$$f + 4g, \quad fg, \quad f^2, \quad f \circ g, \quad g \circ f, \quad \frac{f}{g}$$

b) Peut-on donner un $DL_2(0)$ pour certaines de ces fonctions ?

Exercice 2. Calculer un $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{2x}$

- en élevant au carré celui de $\exp$
- par composition

Exercice 3. On rappelle que la fonction $\tan$ est de classe C^∞ au voisinage de 0

a) Montrer que $\tan$ admet un DL à tout ordre en 0. Et montrer que celui-ci se met sous la forme :

$$\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

b) Calculer $a_1, \dots, a_7$ par les méthodes suivantes :

- en utilisant : $\tan = \frac{\sin}{\cos}$
- en utilisant : $\arctan(\tan x) = x$
- en utilisant : $\tan' = 1 + \tan^2$

Exercice 4. Donner un $DL_{2004}(0)$ de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 5. Soit g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- a) g est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?
- b) g est-elle deux fois dérivable en 0 ?
- c) Donner un $DL_2(0)$ de g

Exercice 6. Donner les $DL(0)$ Suivants

$$\begin{array}{llll}
 f(x) & = & \arctan(x^2) & \text{à l'ordre } 6 \\
 g(x) & = & \sin(2x) - 2(e^x - 1) & \text{à l'ordre } 7 \\
 h(x) & = & \sin(x)e^{\cos x} & \text{à l'ordre } 2 \\
 m(x) & = & \frac{x^2}{\sin^2(x)} & \text{à l'ordre } 5 \\
 p(x) & = & \sin(x) \sinh^2(x) & \text{à l'ordre } 5 \\
 q(x) & = & \ln(1 + x \cos x) & \text{à l'ordre } 4 \\
 u(x) & = & \frac{x \sin^2(x)}{1+x+x^2} & \text{à l'ordre } 6 \\
 v(x) & = & \ln(e^x + e^{-x}) & \text{à l'ordre } 6
 \end{array}$$

Exercice 7. Donner les $DL(0)$ Suivants

$$\begin{array}{llll}
 f(x) & = & \ln^2(1+x) & \text{à l'ordre } 4 \\
 g(x) & = & \ln(1+x^2)e^x & \text{à l'ordre } 4 \\
 h(x) & = & \ln(1+x^2)e^{x^2} & \text{à l'ordre } 6 \\
 m(x) & = & \ln(\cos x) & \text{à l'ordre } 6 \\
 q(x) & = & \sin(\tan x) & \text{à l'ordre } 4 \\
 u(x) & = & \exp(\sin x) & \text{à l'ordre } 3 \\
 v(x) & = & \sin^6(x) & \text{à l'ordre } 9
 \end{array}$$

Limites et Equivalents

Exercice 8. Calculer les limites des fonctions suivantes en 0.

$$\frac{\sin x - x}{x^2} \quad \frac{\sin x - x}{x \ln(1-x^2)} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \quad \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}$$

Exercice 9. Déterminer la limite en 0 de

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$

Exercice 10. Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{e^x - (\cos x + x)}{x^2} \quad \frac{x^3 \arctan x - x^4}{\cos(x^2) - 1}$$

Application à l'étude de fonctions

Exercice 11. Soit $f(x) = (x^6 + x^5 + x^4)^{1/6}$. Trouver l'asymptote en $+\infty$ à la courbe de f et déterminer leur position relative

Exercice 12. Soient $f : x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Déterminer pour ces deux fonctions leurs asymptotes éventuelles et les positions relatives.

Exercice 13. Faire l'étude complète des fonctions suivantes : domaine de définition, continuité, dérivabilité, sens de variation, limites, position de la courbe par rapport aux tangentes, asymptotes, branches infinies.

a) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

b) $f(x) = (x^3 - 1)^2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

d) $f(x) = x^2 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$

e) $f(x) = \frac{x^3}{1-2x^2}$

Exercice 14. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x^2 + x + 1) \arctan \frac{1}{x}$.

a) Etudier les variations de f

b) Soit Γ le graphe de f dans un repère orthonormé. Déterminer un développement limité de f au voisinage de l'infini, permettant de trouver une asymptote Δ à Γ et leur position relative.

c) Déterminer les développements limités de f à l'ordre 2 à gauche et à droite en 0.

Exercice 15. Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit Γ la courbe représentative de f .

a) Montrer que f est continue (à droite) en 0.

b) f est-elle dérivable en 0

c) Etudier le sens de variation de f .

d) Etudier les branches infinies de Γ

e) Déterminer le $DL_3(1)$ de f

f) Préciser l'équation de la tangente Λ à Γ au point d'abscisse 1 ainsi que leur position relative au voisinage de ce point.

Exercice 16. Etudier la position du graphe de $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à ses tangentes en 0 et 1.

Exercice 17. Soit f définie par $f(x) = \frac{\cos x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

a) Donner son domaine de définition.

b) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

c) Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et sa position relative.

Exercice 18. Soit f définie par $f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} + 3}{e^x + 1} \right)$

a) Déterminer le domaine de définition de f , son sens de variation et ses limites en l'infini.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln \left(\frac{1+3e^{-2x}}{1+e^{-x}} \right)$

c) Montrer que la courbe Γ de f admet deux asymptotes D_1 et D_2 qui se coupent un point A de la courbe.

d) Donner l'équation de la tangente Υ en A

e) Déterminer la position relative de Γ par rapport à D_1 et D_2

f) Tracer $\Gamma, \Upsilon, D_1, D_2$