# Fonctions Réciproques et Formules de Tayor

## Fonctions Réciproques

**Exercice 1.** Comparer $\arccos(x)$ et $\arcsin(\sqrt{1-x^2})$

**Exercice 2.** Calculer $f(x) = \arcsin(\cos(2x))$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 3.**
**a)** Montrer que $\forall x \in ]0,1[, \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \arccos(x)$
**b)** Montrer que $\forall x \in [-1,1], \quad 2\arccos\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) = \arccos(x)$

**Exercice 4.** Soit $f(x) = \arcsin(x)$
**a)** Calculer $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$
**b)** En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

**Exercice 5.** Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 6.** Soit $f(x) = \ln(\mathrm{th}(\frac{x}{2}))$
**a)** Faire l'étude de $f$
**b)** Déterminer $f^{-1}$
**c)** Etudier la fonction $g(x) = \left(\mathrm{th}(\frac{x}{2})\right)^x$

**Exercice 7.** Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

- $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x$ dans $[-1;1]$.
- $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}(x)$, pour tout $x$ dans $[-1;1]$.
- $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, pour tout $x$ dans $[-1;1]$.
- $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_-^*$.
- $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(x)$, pour tout $x$ dans $[-1;1[$.

**Exercice 8.** Etudier la continuité de la fonction $f : x \longrightarrow x\,\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de $\cos(\mathrm{Arctan}(x))$ pour $x$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 9.** Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. On précisera avec soin le comportement de $f$ au voisinage des points particuliers et la tangente à la courbe en ces points.

**Exercice 10.** Vérifier les formules suivantes :

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi \qquad \arcsin \frac{4}{5} = 2 \arctan \frac{1}{2}$$

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

**Exercice 11.** Démontrer les égalités suivantes :

a) $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x$ dans $[-1, 1]$

b) $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_-^*$

c) $\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(x)$ pour tout $x$ dans [-1 ;+1[

d) $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$ pour tout $a$ et $b$ réels tels que $ab \neq -1$

e) $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\arctan x$ pour tout $x$ non nul

## Convexité

**Exercice 12.** Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geq 1 + x$$

$$\forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$$

**Exercice 13.** Montrer que la fonction sinus est convexe sur $[-\pi, 0]$ et concave sur $[0, \pi]$.
Quels sont les points d'inflexion de sinus sur $[-\pi, \pi]$ ?

**Exercice 14.** Montrer que la fonction $f : ]0, \pi[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ est concave.
En déduire que l'on a $f(x) \leq \frac{\pi}{2} - x$ pour tout $x \in ]0, \pi[$.

**Exercice 15.** Soit $f(x) = -\ln(\ln(x))$ pour $x > 1$

**a)** Montrer que $f$ est convexe

**b)** En déduire que

$$\forall a, b \in ]1, +\infty[, \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\,\ln(b)}$$

## Formules de Taylor

**Exercice 16.**

**a)** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 0 pour la fonction sinus.

**b)** Montrer que l'on a $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ pour tout réel $x$.

**Exercice 17.**

**a)** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 9 et au point 0 pour la fonction sinus.

**b)** Montrer que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

**Exercice 18.** Montrer les encadrements suivants :

**a)** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

**b)** $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln x < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

**Exercice 19.** En écrivant la formule de Taylor à l'ordre $n$ au point 0 pour la fonction $x \longmapsto e^x$ montrer que l'on a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n \qquad \text{où } |r_n| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

**Exercice 20.** Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

**Exercice 21.** Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $f$ et $f''$ soient bornées.

On veut Montrer que $f$ est borné et que l'on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2} \qquad \text{avec} \quad M_i = \sup |f^{(i)}| \quad i = 0, 1, 2$$

**a)** Soit $a > 0$. En utilisant des formules de Taylor en 0, montrer que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad f(a) - f(-a) = 2af'(0) + \frac{a^2}{2}(f''(\alpha) - f''(\beta))$$

**b)** Montrer que l'on a $|f'(0)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2} M_2$ pour out $a > 0$

**c)** En étudiant les variations de la fonction $u : t \mapsto \frac{M_0}{t} + \frac{t}{2} M_2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire

$$|f'(0)| \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$$

**d)** Conclure (on pourra ce qui précède à la fonction $g(x) = f(x + x_0)$)