Fonctions Réciproques et Formules de Tayor

Fonctions Réciproques

Exercice 1. Comparer $\arccos(x)$ et $\arcsin(\sqrt{1-x^2})$

Exercice 2. Calculer $f(x) = \arcsin(\cos(2x))$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3.
a) Montrer que $\forall x \in]0,1[, \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \arccos(x)$
b) Montrer que $\forall x \in [-1,1], \quad 2\arccos\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) = \arccos(x)$

Exercice 4. Soit $f(x) = \arcsin(x)$
a) Calculer $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$
b) En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5. Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 6. Soit $f(x) = \ln(\operatorname{th}(\frac{x}{2}))$
a) Faire l'étude de f
b) Déterminer f^{-1}
c) Etudier la fonction $g(x) = \left(\operatorname{th}(\frac{x}{2})\right)^x$

Exercice 7. Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

- $\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout x dans $[-1;1]$.
- $\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x)$, pour tout x dans $[-1;1]$.
- $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, pour tout x dans $[-1;1]$.
- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_-^*$.
- $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(x)$, pour tout x dans $[-1;1[$.

Exercice 8. Etudier la continuité de la fonction $f : x \longrightarrow x \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de $\cos(\operatorname{Arctan}(x))$ pour x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. On précisera avec soin le comportement de f au voisinage des points particuliers et la tangente à la courbe en ces points.

Exercice 10. Vérifier les formules suivantes :

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi \qquad \arcsin \frac{4}{5} = 2 \arctan \frac{1}{2}$$

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 11. Démontrer les égalités suivantes :

a) $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $[-1, 1]$

b) $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.
$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_-^*$

c) $\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(x)$ pour tout x dans [-1 ;+1[

d) $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$ pour tout a et b réels tels que $ab \neq -1$

e) $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\arctan x$ pour tout x non nul

Convexité

Exercice 12. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geq 1 + x$$

$$\forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$$

Exercice 13. Montrer que la fonction sinus est convexe sur $[-\pi, 0]$ et concave sur $[0, \pi]$. Quels sont les points d'inflexion de sinus sur $[-\pi, \pi]$?

Exercice 14. Montrer que la fonction $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ est concave. En déduire que l'on a $f(x) \leq \frac{\pi}{2} - x$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

Exercice 15. Soit $f(x) = -\ln(\ln(x))$ pour $x > 1$

a) Montrer que f est convexe

b) En déduire que

$$\forall a, b \in]1, +\infty[, \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\,\ln(b)}$$

Formules de Taylor

Exercice 16.

a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 0 pour la fonction sinus.

b) Montrer que l'on a $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ pour tout réel x.

Exercice 17.

a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 9 et au point 0 pour la fonction sinus.

b) Montrer que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Exercice 18. Montrer les encadrements suivants :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.

b) $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln x < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 19. En écrivant la formule de Taylor à l'ordre n au point 0 pour la fonction $x \longmapsto e^x$ montrer que l'on a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n \qquad \text{où } |r_n| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 20. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f et f'' soient bornées.

On veut Montrer que f est borné et que l'on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2} \qquad \text{avec} \quad M_i = \sup |f^{(i)}| \quad i = 0, 1, 2$$

a) Soit $a > 0$. En utilisant des formules de Taylor en 0, montrer que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad f(a) - f(-a) = 2af'(0) + \frac{a^2}{2}(f''(\alpha) - f''(\beta))$$

b) Montrer que l'on a $|f'(0)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2$ pour out $a > 0$

c) En étudiant les variations de la fonction $u : t \mapsto \frac{M_0}{t} + \frac{t}{2}M_2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire

$$|f'(0)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

d) Conclure (on pourra ce qui précède à la fonction $g(x) = f(x + x_0)$)