Accroissements Finis

Dérivabilité

Exercice 1.

a) Etudier la dérivabilité en 0 de

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

b) Même question pour

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

Exercice 2. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x| \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$$

Exercice 3. Calculer le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{\ln(1+x^4)}$$

Exercice 4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \mapsto \sin(f(x^2))$.

b) On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \log(|f(x)|)$.

Exercice 5. Calculer les dérivées des fonctions

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2\sin^2 x} \quad f_2(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1} \quad f_3(x) = \ln(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}) \quad f_4(x) = (x(x-2))^{1/3}.$$

Exercice 6. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = \sin(x^5+2x) \qquad g(x) = \cos(\sin(x)) \qquad h(x) = \ln(x^2) \qquad l(x) = \ln(\ln(x))$$

$$m(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad n(x) = \frac{1}{1+\tan x} \qquad u(x) = \sin\left(\frac{x^2}{\cos(x^2)}\right) \qquad v(x) = e^{e^x}$$

Exercice 7. Montrer que chacune des fonctions définies ci-dessous admet sur son domaine de définition une fonction réciproque g que l'on explicitera. Calculer g' lorsqu'elle existe.

$$f_1(x) = 3 - 7x, \qquad f_2(x) = x + \sqrt{x}$$

$$f_3(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2 - 1 & \text{si} & x \in [0;1[\\ \frac{x}{2-x} & \text{si} & x \in [1;2[\end{array} \right. , \qquad f_4(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & x < 1 \\ x^2 & \text{si} & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si} & x > 4 \end{array} \right.$$

Exercice 8. Déterminer a et b de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } x \leq 1 \;\text{ et }\; f(x) = a(x^2 - 1) + b \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9. Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 telles que $g(0) = h(0)$. on pose

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} g(x) & \text{si} & x \leq 0 \\ h(x) & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0.

Exercice 10. Calculer la fonction dérivée d'ordre n de $f(x) = \sin x$.

Exercice 11. Calculer la dérivée $n-$ième des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$k(x) = 3x^k \qquad l(x) = \cos(2x) \qquad m(x) = xe^x$$

$$n(x) = \sin(x)e^{2x} \qquad u(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x \qquad v(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Exercice 12. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que f est continue en 0

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-m_n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$; où $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$

e) En déduire que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

f) Déterminer une fonction non identiquement nulle et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'extérieur de $[0, 1]$

Accroissements Finis **Exercice 13.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$\forall x \in R$, $\forall h > 0$, la tangente au point d'abscisse $x + \frac{1}{2}h$ est parallèle à la corde joignant les points d'abscisse x et $x + h$.

Prouver que f est un polynôme de degré au plus 2.

Exercice 14. Soit f deux fois dérivable sur $[a,b]$, telle que $f^{(3)}$ existe sur $]a,b[$. Montrer que :

$$\exists c \in]a,b[, \qquad f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b))-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$$

Exercice 15. Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]0,1[$.
On suppose que $f(x)$ et $xf'(x)$ admettent des limites finies en 0. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x)=0$$

Exercice 16. Soit $a\in\mathbb{R}$, $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et drivable sur $[a,+\infty[$

a) Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

b) Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$$

c) Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=l>0 \Longrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\right)$$

d) Les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 17. [Règle de l'Hospital]
Soient $f,g : I\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables sur l'intervalle $I=\langle\alpha,\beta\rangle$. Soit $\lambda\in[\alpha,\beta]$ (éventuellement infini).
On suppose que $\forall t\in I\setminus\{\lambda\}$, $g(t)\neq 0$ et $g'(t)\neq 0$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{lcl} lim_{x\to\lambda} f(x) & = & 0 \\ lim_{x\to\lambda} g(x) & = & 0 \\ lim_{x\to\lambda}\frac{f'(x)}{g'(x)} & = & L \end{array}\right\} \Longrightarrow lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

Où $L\in\mathbb{R}\cap\{\pm\infty\}$

Exercice 18. En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x>0$ et $x<0$ démontrer que

a) pour tout réel x on a $e^x\geq 1+x$;

b) pour tout $x>-1$ on a $\ln(1+x)\leq x$.

Exercice 19. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que

a) $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\quad |\sin x-\sin y|\leq|x-y|$ et $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$.

b) $\forall x>0,\quad \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, puis calculer $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\ln(x+1)-\ln x)$ et $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$. En déduire que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

c) Calculer $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 20. A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Etude de Fonctions

Exercice 21. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

Montrer que f est constante.

Exercice 22. Étudier le sens de variation des fonctions f et g définies sur $[0, \pi/2[$ par $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$. En déduire que l'on a $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ si $x \in]0, \pi/2[$.

Exercice 23. On considère les fonctions $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.
a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et de g. Calculer f' et g' et en déduire les variations de f et de g. Donner les extrema locaux de f et de g. Y a-t-il des extrema globaux ?
b) Trouver les asymptotes aux graphes de f et de g.
c) Déterminer les intervalles où les fonctions f et g sont convexes ou concaves et leurs points d'inflexion.
d) Tracer les graphes de f et de g.

Exercice 24. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 25.
a) Montrer que l'on a $x \cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
b) Étudier le sens de variation de la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
c) Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

Exercice 26. Etudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives :

$$g(x) = x^x \qquad h(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right) \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Donner en fonction de $a > 0$ le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation Construire le graphe des fonctions suivantes :

$$f_{0,1}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad f_{m,\sigma}(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où m et σ sont deux réels fixés. Préciser les points d'inflexion.

Fonctions Réciproques

Exercice 27. Comparer $\arccos(x)$ et $\arcsin(\sqrt{1 - x^2})$

Exercice 28. Calculer $f(x) = \arcsin(\cos(2x))$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 29.

a) Montrer que $\forall x \in]0,1[, \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \arccos(x)$

b) Montrer que $\forall x \in [-1,1], \quad 2\arccos\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) = \arccos(x)$

Exercice 30. Soit $f(x) = \arcsin(x)$

a) Calculer $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$

b) En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 31. Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 32. Soit $f(x) = \ln(\mathrm{th}(\frac{x}{2}))$

a) Faire l'étude de f

b) Déterminer f^{-1}

c) Etudier la fonction $g(x) = \left(\mathrm{th}(\frac{x}{2})\right)^x$

Exercice 33. Montrer que chacune des fonctions définies ci-dessous admet une fonction réciproque g que l'on explicitera. Calculer g' quand elle existe.

$$f_1(x) = 3 - 7x \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 \text{ si } x \in [0;1[\\ \frac{x}{2-x} \text{ si } x \in [1;2[\end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 1 \\ x^2 \text{ si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} \text{ si } x > 4 \end{cases}$$

Exercice 34. Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

- $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout x dans $[-1;1]$.
- $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}(x)$, pour tout x dans $[-1;1]$.
- $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, pour tout x dans $[-1;1]$.
- $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_-^*$.
- $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(x)$, pour tout x dans $[-1;1[$.

Exercice 35. Etudier la continuité de la fonction $f : x \longrightarrow x\,\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de $\cos(\mathrm{Arctan}(x))$ pour x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 36. Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. On précisera avec soin le comportement de f au voisinage des points particuliers et la tangente à la courbe en ces points.

<u>Convexité</u>

Exercice 37. Montrer que la fonction sinus est convexe sur $[-\pi, 0]$ et concave sur $[0, \pi]$. Quels sont les points d'inflexion de sinus sur $[-\pi, \pi]$?

Exercice 38. Montrer que la fonction $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ est concave. En déduire que l'on a $f(x) \leq \frac{\pi}{2} - x$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

Exercice 39. Soit $f(x) = -\ln(\ln(x))$ pour $x > 1$

a) Montrer que f est convexe

b) En déduire que

$$\forall a, b \in]1, +\infty[, \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\,\ln(b)}$$

Formules de Taylor

Exercice 40.

a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 0 pour la fonction sinus.

b) Montrer que l'on a $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ pour tout réel x.

Exercice 41.

a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 9 et au point 0 pour la fonction sinus.

b) Montrer que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Exercice 42. Montrer les encadrements suivants :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

b) $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln x < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 43. En écrivant la formule de Taylor à l'ordre n au point 0 pour la fonction $x \longmapsto e^x$ montrer que l'on a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n \qquad \text{où } |r_n| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 44. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 45. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f et f'' soient bornées.

On veut Montrer que f est borné et que l'on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2} \qquad \text{avec} \quad M_i = \sup |f^{(i)}| \quad i = 0, 1, 2$$

a) Soit $a > 0$. En utilisant des formules de Taylor en 0, montrer que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad f(a) - f(-a) = 2af'(0) + \frac{a^2}{2}(f''(\alpha) - f''(\beta))$$

b) Montrer que l'on a $|f'(0)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{a}{2}M_2$ pour out $a > 0$

c) En étudiant les variations de la fonction $u : t \mapsto \frac{M_0}{t} + \frac{t}{2}M_2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire

$$|f'(0)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

d) Conclure (on pourra ce qui précède à la fonction $g(x) = f(x + x_0)$)

<u>ggg</u>

Exercice 46. (7 p.97 du polycopié)
Vérifier les formules suivantes :

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi \qquad \arcsin \frac{4}{5} = 2 \arctan \frac{1}{2}$$

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 47. Démontrer les égalités suivantes :

a) $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $[-1, 1]$

b) $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.
$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_-^*$

c) $\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(x)$ pour tout x dans [-1 ;+1[
<u>factultatif :</u>

d) $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$ pour tout a et b réels tels que $ab \neq -1$

e) $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\arctan x$ pour tout x non nul