Propriétés Fondamentales de la Continuité.

Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 1. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

Exercice 2. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies par

$$f(x) = xE(x) \quad \text{et} \quad g(x) = E(x)\sin(\pi x)$$

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$.
a) Montrer qu'il existe un intervalle $]0, \eta[$ sur lequel $\frac{9}{10}x < f(x) < \frac{11}{10}x$.
b) En déduire que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4. Soit k un nombre réel positif. On dit qu'une application f est k-lipschitzienne sur un intervalle I si pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
a) Montrer que si f est k-lipschitzienne sur I, elle y est continue.
b) Montrer que la réciproque de ce résultat est fausse. On pourra par exemple considérer l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et pour un entier $n > 0$, considérer la différence $\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{4n}}$.

Exercice 5. Montrer que tout polynôme du troisième degré admet (au moins) une racine réelle.

Exercice 6. Soit f croissante sur $[a, b]$
a) Montrer que : f vérifie le TVI sur $]a, b[\Rightarrow f$ est continue sur $]a, b[$
b) Montrer que : f vérifie le TVI sur$[a, b] \Rightarrow f$ est continue sur $[a, b]$
c) que se passe-t-il si f est décroissante ?

Exercice 7.
a) Que dire d'une fonction continue sur un intervalle I et ne prenant au plus que deux valeurs ?
b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$. Que dire de f si elle est continue ?

Exercice 8. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et g une fonction également définie et continue sur I telle que :

$$\forall x \in I, \qquad (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$$

a) Que peut-on en déduire ?

Exercice 9. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[0,1]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

a) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[0,1]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = f(1)$.

a) Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

b) Un mobile parcourt, à vitesse continue, une distance d en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$. Pour ceci on introduira la fonction $d : t \mapsto d(t) =$ distance parcourue au temps t et on construira une fonction f à laquelle appliquer 1

c) Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Exercice 11. Donner des exemples de fonctions continues telles que :

a) $f([a,b]) = [c,d]$

b) $f(]a,b[) = \mathbb{R}$.

Exercice 12. Soient deux réels $a < b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \qquad 0 < g(x) < f(x)$$

a) Montrer que

$$\exists \lambda > 0, \ \ \forall x \in [a,b], \qquad (1+\lambda) g(x) \leq f(x)$$

b) Montrer que

$$\exists \mu > 0, \ \ \forall x \in [a,b], \qquad g(x) + \mu \leq f(x)$$

Exercice 13. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Où l et L sont deux réels fixés.

a) Montrer que f est borné sur $\mathbb{R}$

b) f atteint-elle ses bornes ?

c) En supposant que $l = L = 0$, montrer que $|f|$ atteint sa borne supérieure.

Fonctions réciproques

Exercice 14. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in \ ]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 15.

a) Quelle est la parité de la réciproque d'une fonction bijective impaire ?

b) Que se passe-t'il pour les fonctions paires ?

Exercice 16. Soient I et J deux intervalles disjoints (i.e. $I \cap J = \emptyset$), Soient alors f_I définie sur I et f_J définie sur J

a) donner une CNS pour que la fonction ci-dessous induise une bijection sur $I \cup J$:

$$f(x) = \begin{cases} f_I(x) & \text{si} \quad x \in I \\ f_J(x) & \text{si} \quad x \in J \end{cases}$$

b) Calculer alors f^{-1}.

c) Reprendre l'exercice dans le cas où f serait définie par morceaux sur trois intervalles I, J et K deux à deux disjoints (i.e $I \cap J = \emptyset$, $I \cap K = \emptyset$ et $K \cap J = \emptyset$)

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+2} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x+3 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+2x+3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Tracer son graphe.

b) Montrer que f est continue et strictement croissante.

c) Calculer et tracer le graphe de sa fonction réciproque g.

Exercice 18. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 + x - 1 \end{array}$$

Montrer que f est bijective, et résoudre l'équation en x

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

Exercice 19. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{1+e^x} \end{array}$$

Montrer que f est continue, bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}

Exercice 20. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) f est elle continue sur les points rationnels ?

b) f est elle continue sur les points irrationnels ?

c) f est elle bijective ?

Exercice 21.
Soit f une fonction continue et bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Montrer que $\{f(0); f(1)\} = \{0; 1\}$.