Limites et Continuité.

Fonctions

Exercice 1.
a) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = E(x + 1/2)$.
b) S'agit'-il d'une fonction paire ?

Exercice 2. Comparer les fonctions

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x - 1$$

Exercice 3. Pour chaque fonction f, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$, étudier la parité et répondre aux questions
a) $f(x) = \frac{\cos(x)+2}{x^2+1}$. La fonction f est-elle bornée sur $\mathcal{D}_f$?.
Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à celui de la fonction $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
b) $f(x) = \ln\left(\frac{1-4x^2}{2}\right)$. Pour quelles valeurs de x les points du graphe de f d'abscisse x sont-ils au dessus de l'axe des abscisses ?
c) $f(x) = \frac{e^{-3x^2}+1}{5x+3}$. Le graphe de f intersecte-t'il l'axe des abscisses ?

Limites

Exercice 4. Montrer que $\lim_{x\to\lambda} f(x) = l$ si et seulement si

$$\text{Quelque soit la suite } u \text{ convergent vers } \lambda, \quad \lim f(u_n) = l$$

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_0 f = l$ et $\lim_0 g = l'$. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \max(f(x), g(x)) = \max(l, l')$$

Exercice 6. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels :

$$P(X) = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0 \qquad Q(X) = b_q X^q + b_{q-1}X^{q-1} + \ldots + b_0$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

Exercice 7. Si $E(x)$ désigne la *partie entière* d'un réel x, donner un encadrement de $E(x)$ en fonction de x, et en déduire :

$$\lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x}).$$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x^7} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{4\cos^2(x)-3}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(\frac{x}{2})}$$

Exercice 9. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x+3x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^4(x)}{x^3\ln(1+x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^4)}{x(\tan(x)-\sin(x))} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{\ln(\cos x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}\,\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \qquad \lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x^2}-5x^4}{\ln(7x^2)+2x}$$

Exercice 10. Déterminer les limites lorsqu'elles existent suivantes ou d'éventuelles limites à droite et à gauche, si cela a un sens :

$a)$ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x,$ $b)$ $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

$c)$ $\lim_{x\to n}\sin(\pi(x-E(x))),$ $d)$ $\lim_{x\to n}(1-xE(x))(x-E(x)),$

$e)$ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$ $f)$ $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

$g)$ $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ $h)$ $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{(x-1)^2}$

$i)$ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ $j)$ $\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^2}+x)$

Exercice 11. Calculer les limites suivantes :

$a)$ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ $b)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

$c)$ $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$ $d)$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$

$e)$ $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ $f)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$

$g)$ $\lim_{x\to 0}x\frac{\tan x}{\cos^2 x-1}$ $h)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$

Exercice 12. Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles, telle que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{|x|} = +\infty.$$

a) Montrer que pour tout réel α il existe $x_\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$f(x)-|\alpha x|\geq|x|$$

pour tout $|x|\geq x_\alpha$.

b) En déduire que pour tout α réel

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-\alpha x=\infty.$$

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que :
- $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
- il existe $l \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l .$$

a) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

b) Montrer que si $l > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ si et seulement si } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

<u>Continuité</u>

Exercice 14.
a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $[a, \infty[$, on a :

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq \frac{1}{a^2}|x - y|.$$

b) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \to |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| < \epsilon.$$

c) Écrire une formulation de la propriété précédente en termes de limite.
d) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq |x|$$

a) interpréter graphiquement cette condition
b) Montrer que f est continue en 0
c) La fonction $x \sin(\frac{1}{x})$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 16.
a) Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+2x+3}{x^3+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

la fonction f est-elle continue en 0 ?
b) Soit g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x+1}{3x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

la fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 17. Soit f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

Quel est son ensemble de définition ? Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 18. Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f définie ci-dessous soit prolongeable par continuité en 0.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 19. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

a) f continue en 0 et pour tout x, $f(x) = f(3x)$

b) f continue en 1 et pour tout x, $f(x) = -f(x^2)$