
...Suite et fin.

Suites Récurrentes

Exercice 1.

a) Par un argument géométrique, montrer que :

$$\forall \alpha \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq \sin(\alpha) \leq \alpha$$

b) En déduire quelles sont les limites possibles de la suite $x_{n+1} = \sin(x_n)$ avec $x_0 \in [0, \pi/2]$

c) Etudier la monotonie de cette suite, et en déduire sa limite.

Exercice 2. Soit une suite u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

a) Comment doit être u_0 pour que la suite soit définie.

b) Si u converge déterminer une valeur possible pour la limite.

c) En discutant suivant la valeur u_0 , étudier la monotonie de la suite u .

d) Etudier la convergence de la suite u

Exercice 3. Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}$

a) Démontrer qu'à partir du rang 2, $u_n \geq 2$

b) Déterminer une relation entre $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$

c) Montrer que la suite est croissante.

d) Montrer que la suite u est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 4. Soit une suite u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt[3]{1 + 3u_n} - 1$

a) Montrer que la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x} - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$

b) Si u converge, déterminer des valeurs possibles pour la limite.

c) En discutant suivant la valeur de u_0 , étudier la monotonie de la suite u

d) Etudier la convergence et la limite de la suite u , si elle existe.

Exercice 5. Soit u définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

a) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^2$, étudier la monotonie de f .

b) Si u converge déterminer la valeur possible pour la limite.

c) Etudier la monotonie des suites (u_n) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

d) la convergence des suites (u_n) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Exercice 6. Soit u définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}$. Etudier la monotonie de cette suite, en déduire sa convergence, puis sa limite.

Exercice 7. On définit u par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. En supposant que u converge déterminer sa limite l .

Montrer que $u - l$ tend vers 0. Conclure.

Application à la recherche de points fixes

Exercice 8. Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction définie sur un intervalle I , vérifiant pour un certain $k \in [0, 1[$

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

a) Montrer que quelque soit la suite u convergeant vers l , la suite $f(u)$ converge vers $f(l)$

b) On appelle point fixe de f , tout nombre $\lambda \in I$, vérifiant

$$f(\lambda) = \lambda$$

Montrer que si f admet un point fixe alors il est unique

c) Soit $u_0 \in I$ quelconque. Montrer que la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$$

d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

e) montrer que u est de Cauchy... et donc que u converge.

f) En déduire que f admet un unique point fixe λ . Et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \lambda| \leq k^n |u_0 - \lambda|$$

En particulier, déduire l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \lambda| \leq k^n |I|$$

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $J = [1, 2]$ par

$$\forall x \in J, \quad f(x) = \frac{3x + 4}{2x + 3}$$

a) Montrer que

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x + 3}$$

En déduire la monotonie de f et que $f(J) \subset J$.

b) Montrer que

$$\forall x, y \in J, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{25} |x - y|$$

c) En vous inspirant de l'exercice précédent, montrer que f admet un unique point fixe.

d) En déduire une valeur approchée (sous forme de fraction) de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par excès

e) En déduire une valeur approchée (sous forme de fraction) de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut