...Suite...

Quelques limites

Exercice 1. Soient u une suite et l un réel.

a) Montrer qu'il y a equivalence entre les assertions

$$\begin{array}{ll} (i) & \lim u = l \\ (ii) & \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in N,\ \ \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \epsilon \\ (iii) & \forall \epsilon \in]0, 10^{-9}[,\ \exists N \in N,\ \ \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \epsilon \end{array}$$

b) Que se passe-t'il si l'on change $\epsilon > 0$ par $\epsilon \geq 0$ dans la quantification de la limite.

Exercice 2.

a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} P(n)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$

c) Montrer que :

$$\forall x \geq 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$ avec $q > 1$

e) En déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$

f) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

g) Montrer par quantification :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Exercice 3. En revenant à la définition de la limite, étudier la convergence des suites suivantes : :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \qquad v_n = \frac{n^2+1}{n+1} \qquad w_n = \frac{3}{2^{n+1}}$$

Exercice 4. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels :

$$P(X) = a_q X^q + a_{q-1} X^{q-1} + \ldots + a_0 \qquad Q(X) = b_p X^p + b_{p-1} X^{p-1} + \ldots + b_0$$

avec $a_q \neq 0$ et $b_p \neq 0$ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_q n^q}{b_p n^p}$$

Exercice 5. Soient u une suite réelle bornée et v une suite convergeant vers 0.
Que peut-on dire de la convergence et de la limite éventuelle de uv ?

Exercice 6. Déterminer si elles existent les limites des suites suivantes

$a)$ $\frac{10^9 2n^2}{n+n^3}$	$b)$ $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$	$c)$ $\frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+\sqrt{n}}$	$d)$ $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$
$e)$ $\frac{(-1)^n+n}{n+7\sqrt{n}}$	$f)$ $\frac{(-3)^n+7^n}{2^n+5^n}$	$g)$ $\frac{n^2+\cos(n)}{\sin(n)-3n^2}$	$h)$ $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}$
$i)$ $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$	$j)$ $\frac{2^n-3^{n+1}}{5^{2n}}$	$k)$ $\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+n+1}$	$l)$ $\sin(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi)$

Propriétés des suites convergentes

Exercice 7. Démontrer la propriété si elle est vraie, donner un contre-exemple sinon.

1. Une suite d'entiers convergente est stationnaire apcr.
2. Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} > 0$ et $u_{2p+1} < 0$, alors la suite u diverge.
3. Si $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$ alors la suite u converge.
4. Si u est croissante alors la suite u tend vers $+\infty$
5. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ alors la suite u est positive apcr
6. Toute suite monotone est convergente.
7. Toute suite croissante et majorée est bornée
8. Si la suite u est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
9. Si $\forall n, u_n < v_n$ et $\lim v = 0$ alors $\lim u = 0$
10. Si $\forall n, u_n < v_n$ et $\lim v = 0$ alors $\lim u \geq 0$
11. Une suite non majorée tend vers $+\infty$
12. Si $\lim u = l$ alors, pout tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+p} - u_n = 0$
13. Si la suite $|u|$ converge alors u converge.
14. Si les suites x et y divergent, alors la suite $x + y$ diverge
15. Si les suites x et y divergent, alors la suite $x \cdot y$ diverge
16. Pour toute suite y, Si $\lim x = 0$ alors $\lim xy = 0$
17. Si $\lim xy = 0$ alors soit $\lim x = 0$, soit $\lim y = 0$
18. Si u est convergente et strictement positive, alors la limite de u est strictement positive.
19. Si u est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 7$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 7$
20. Une suite de termes positifs qui converge vers 0, est décroissante apcr.
21. On peut toujours considérer deux suites u et v, comme extraites d'une même suite w.

Exercice 8. Soient u et v deux suites tel que $u_0 < v_0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

Montrer que $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, en déduire que ces deux suites convergent et ont même limite.

Exercice 9. Démontrer que a et b définies par $a_0 = 1,\ \ b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad\qquad \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$$

sont adjacentes de limite $\sqrt{2}$

Exercice 10. Etudier la convergence de

$$\left((-1)^n \frac{n}{n+1} \cos(\frac{n\pi}{7})\right)$$

Exercice 11. Soit u une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer qu'alors u converge.

Exercice 12. Soit u une suite de réels, on appelle suite de Cesaro associée à u la suite définie par :

$$\left(\frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_N}{N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

a) Comparer la convergence de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de sa suite de Cesaro associée.

b) Montrer que si la suite u converge vers l, sa suite de Cesaro converge vers l

c) Que dire de la réciproque ?

d) Que dire dans le cas où u tend vers $+\infty$?

Exercice 13. Soit a une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $l \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on associe les rationnels $x_n = p^{-n}E(p^n x)$ et $y_n = x_n + p^{-n}$ (valeurs approchées de x à p^{-n} près, respectivement par défaut et par excès). Montrer que ces deux suites convergent vers x.

Exercice 15.

a) Soit u une suite de nombres réels telle que

$$(*) \qquad\qquad |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

Montrer que u converge.

b) Montrer que toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite vérifiant $(*)$