Logique Ensembles et Applications

Logique

Exercice 1. Soient x, y des réels et α un réel strictement positif, placer des symboles $\Leftarrow, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ de sorte que cela forme une proposition vraie.

$$\begin{array}{rl}
x < x_0 + \alpha^2 & |x - x_0| < \alpha^2 \\
|x-1| < 2 \text{ et } |x-2| < 2 & x < 10 \\
\sin(x) = 0 & x = 0 \\
xy > 0 & x < 0 \text{ ou } y < 0
\end{array}$$

Exercice 2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Indiquer leur négation :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x < xy$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 1$ ou $x^2 < 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 1 \Rightarrow x \geq 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < -1 \Rightarrow x^2 \geq 1$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \left(x^2 < -1 \Rightarrow x - y > n\right)$ ou $\left(n^2 + y > x^2 \text{ et } x^2 > 7\right)$

Exercice 3. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et donner leur négation.

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ , \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists y \in \mathbb{R}\ , \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \exists x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists y \in \mathbb{R}\ , \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ , \quad y^2 > x.$$

Exercice 4. Soit (E) l'équation : $ax^2 + ax + 1 = 0$, déterminer une condition

1. Nécessaire et Suffisante pour que (E) ait au moins une solution réelle.
2. Nécessaire mais pas Suffisante pour que (E) ait au moins une solution réelle.
3. Suffisante mais pas Nécessaire pour que (E) ait au moins une solution réelle.

Exercice 5. Soit H la proposition : "Soit P un polynôme à coefficients complexes, si le complexe α est une racine de P, et les coefficients de P sont réels alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P".

a) Démontre H.

b) Ecrire H à l'aide du formalisme mathématique usuel (on pourra noter $\mathbb{R}[X]$ les polynômes à coefficients réels et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes à coefficients complexes).

c) Ecrire la contraposée de H.

d) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer (n est un nombre entier naturel, x et y sont des nombres réels) :

1. n premier $\Longrightarrow n = 2$ ou n impair.
2. $xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$.

3. $(x \neq y) \Longrightarrow [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$.

Exercice 7. Démontrer par contraposée les assertions suivantes (n est un nombre entier naturel, x et y sont des nombres réels) :

1. n premier $\Longrightarrow n = 2$ ou n impair.
2. $xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$.
3. $(x \neq y) \Longrightarrow [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$.

Exercice 8.

a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

b) Calculer de deux manières différentes $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3$. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 9. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$z + \frac{1}{z} = 2\,\cos\theta \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 2\,\cos(n\theta).$$

Exercice 10.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.
2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $[0, \pi]$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|\sin n\theta| \leq n \sin\theta$.

Ensembles et Applications

Exercice 11. Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point,

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big[n, +\infty\Big[, \qquad I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[.$$

Exercice 12. Soient A et B des parties d'un ensemble E, C et D des parties d'un ensemble F et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On note $f(A)$ l'ensemble image de A par f : $f(A) = \{y \in F, \quad \exists x \in A,\ y = f(x)\}$.
Et on note $f^{-1}(C)$ l'ensemble des antécédents de C par f : $f^{-1}(C) = \{x \in E, \quad f(x) \in C\}$
Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, a-t'on égalité ?
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Exercice 13.

a) Montrer que pour tout a et b réels $4ab \leq (a+b)^2$

b) Calculer les domaines de définition des fonctions :

$$f(x) = 2\sqrt{x(1-x)} + 1 \qquad g(x) = 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 3$$

c) En utilisant la question a), donner un encadrement des points de $f(D_f)$.

d) Même question pour $g(D_g)$.

e) Montrer que $g \circ f$ est bien définie sur D_f.

f) Qu'en est-il pour $f \circ g$?

Exercice 14. Construisez deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ tel que $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 15.

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$
2. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des entiers pairs
3. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
5. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$
6. Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$
7. En déduire un exemple d'application bijective entre $[0,1]$ et $[0,1[$