Nombres Complexes

Ecriture Cartesienne et Trigonométrique

Exercice 1. Mettre sous la forme $a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 2. Calculer le module des nombres complexes suivants

$$Z_1 = -i \quad ; \quad Z_2 = 1+i \quad ; \quad Z_3 = 2i(3+i)(1+i) \quad ; \quad Z_4 = 3i(4+2i)(1-i)$$

$$Z_5 = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-i)(i+1)} \quad ; \quad Z_6 = \frac{(1+i)^4}{2+i} \quad ; \quad Z_7 = \frac{2+i}{1-i} + \frac{2i}{1+i}$$

Exercice 3. Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 4. Représenter sous forme trigonométrique les complexes suivants

$$ie^{i\theta} \qquad 1+e^{i\theta} \qquad e^{i\theta}+e^{i\phi} \qquad (\theta, \phi \in \mathbb{R})$$

Exercice 5. Calculer $Z = (1+i\sqrt{3})^{2003}$.

Trigonométrie

Exercice 6. Le but de cet exercice est de partir des propriétés de l'exponentielle complexe pour retrouver les formules de trigonométrie. On rappelle les propriétés suivantes : pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|e^{ix}| = 1 \qquad e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)} \qquad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

a) Montrer que $(e^{i\theta})^{-1} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Montrer que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

b) Etablir les formules d'Euler $(\theta \in \mathbb{R})$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

c) Calculer $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction de sin, cos, et tan de x et de y. En déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

d) Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ $(x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

e) En utilisant la formule d'Euler, linéariser (ou transformer le produit en somme) $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$2\cos a\cos b \quad ; \quad 2\sin a\sin b \quad ; \quad cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a$$

Exercice 7.
a) Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

b) En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 8.
a) Enoncer la formule du binôme : $(z_1 + z_2)^n$ et expliciter pour $n = 5$.
b) A l'aide de la formule d'Euler et de la formule précédente, exprimer $\cos^5(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, $\cos(3\theta)$ et $\cos(5\theta)$
c) Généraliser la formule pour $\cos^n(\theta)$.

Exercice 9.
a) Exprimer en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$

$$\cos(2\theta) \quad \sin(2\theta) \quad \cos(3\theta) \quad \sin(4\theta) \quad \sin(6\theta)$$

b) Linéariser

$$\cos^2(\theta) \quad \sin^2(\theta) \quad \cos^3(\theta) \quad \sin^4(\theta) \quad \sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$$

Exercice 10. Calculer $\sin(25\pi/3)$, $\cos(19\pi/4)$, $\tan(37\pi/6)$.

Equations et Racines n-ièmes

Exercice 11. Calculer les racines carrées de $(1+i)/\sqrt{2}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 12. Calculer les racine 4^{iemes} de -1 et les racines 5^{iemes} de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 = (1-i)/\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ et donner pour chaque solution le module et un argument.

Exercice 15. Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
a) Factoriser $P(Z)$ et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$.
b) Déduire de a) les solutions de l'équation d'inconnue z : $((2z+1)/(z-1))^4 = 1$.

Exercice 16.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions.
b) On pose$u = e^{i\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$
c) Vérifier que

$$u + u^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad u^2 + u^3 = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

d) En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, puis calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.
e) En déduire une construction du pentagone régulier.

Exercice 17. SOMME GEOMETRIQUE :
a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$
b)Soit θ un nombre réel. On pose $Z_n = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + \ldots + e^{in\theta} = \sum_{k=0}^{n} e^{k\theta}$
Simplifier l'expression de Z_n (Indication : utiliser la formule précédente et "l'angle moitié").
En déduire des expressions simples de :

$$\begin{aligned} C &= 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \\ S &= 1 + \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \\ D &= \cos(\alpha) + \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+2\theta) + \ldots + \cos(\alpha+n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha+k\theta) \end{aligned}$$

c)Déduire également de la question a) que la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

Remarque : la formule de la somme géométrique est à connaitre.

Exercice 18.
a) Calculer les racines carrées de

$$1-i \qquad -3+4i \qquad 1+i\sqrt{3} \qquad 5-12i$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= 0 \\ z^2 + (4-6i)z - 5 - 14i &= 0 \\ z^2 + 2z - 2 - 4i &= 0 \\ z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) &= 0 \\ z^{2n} - (2\cos\phi)z^n + 1 &= 0 \quad (\phi \in R, n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Exercice 19. Trouver les racines carrées (complexes) des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -i \qquad Z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \qquad Z_3 = 1+i \qquad Z_4 = 5-12i \qquad Z_5 = \frac{2-\sqrt{5}}{3}$$

Pour les deux premiers, on donnera le résultat sous forme trigonométrique et cartésienne ; pour Z_3, sous forme trigonométrique ; pour Z_4 et Z_5, sous forme cartésienne.

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a)\ Z^2 + (1-2i)Z + 1 + 5i = 0 \quad ; \quad b)\ Z^4 + (1-2i)Z^2 - 3 - i = 0$$
$$c)\ (Z+1)^4 + 16(Z-1)^4 = 0 \quad ; \quad d)\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$$

Interprétation Géométrique

Exercice 21.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $(z-2)/(z-1) = i$. On donnera la $=$ solution sous forme algébrique.
b) Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose $=$ que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z-2)/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

Exercice 22. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$A = \{z \in \mathbb{C}; z - \bar{z} = 2\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C}; \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C}; z + \bar{z} = 2|z-1|\}$$

Exercice 23. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que : $|(z-3)/(z-5)| = 1$.

Exercice 24. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $2 \leq |z| \leq 4$. Montrer que $1/5 \leq |(5-z)/(i+z)| \leq 9$.