Nombres Réels

Exercice 1. Soit n un entier relatif qui n'est pas un carré parfait, montrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 2. Mettre sous forme de fractions les nombres réels suivants donnés par leurs développements décimaux périodiques :

$$x_1 = 3,14\overset{\frown}{14}\ldots \quad ; \quad x_2 = 0,99\overset{\frown}{9}\ldots \quad ; \quad x_3 = 3,1499\overset{\frown}{9}\ldots$$

Exercice 3. On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x, c'est à dire $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

a) Montrer que pour tout réels x et y $\quad E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel x, $nE(x) \leq E(nx) < nE(x) + n$ et en déduire $E(\frac{E(nx)}{n})$ en fonction de $E(x)$.

c) Calculer $E(x) + E(-x)$ pour x réel.

Exercice 4. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

a) Soient $x = 0,11111111111111111112020020002...$ et $y = 0,1111111111111111113030030003...$ deux nombres réels. Trouver un nombre rationnel z tel que $x < z < y$

b) Montrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$10^{-n} \leq \frac{1}{n+1}$$

c) Soit $r > 0$ un réel strictement positif, montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ telque

$$10^{-n_0} < r$$

d) Soit $a \in \mathbb{R}$, Montrer que

$$a < \frac{E(10^{n_0}a) + 1}{10^{n_0}} < a + r$$

e) Montrer qu'entre deux réels quelconques distincts on peut toujours trouver un rationnel. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

f) Montrer que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

g) Montrer qu'entre deux réels distincts on peut trouver une infinité de rationnels et une infinité d'irationnels.

Exercice 5.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$
En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

b) En déduire un encadrement de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $N \geq 1$.

c) Donner la partie entière de $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$?

Exercice 6. Comparer $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$, puis $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ et $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Exercice 7. Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x-a|<|a|$. Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a.

Exercice 8.
a) Soient x et y des réels tels que $-5 \leq x \leq 4$ et $-10 \leq y \leq -6$. Trouver les encadrements optimaux de $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$, et $\sqrt{x^2}$. Que peut-on dire de $\frac{1}{x}$?
b) même question pour $-7 \leq x \leq 9$ et $-2 \leq y \leq -1$
réponse : $-9 \leq x+y \leq 8$; $-6 \leq x-y \leq 11$; $-18 \leq xy \leq 14$
$-9 \leq \dfrac{x}{y} \leq 7$; $0 \leq \sqrt{x^2} \leq 9$
c) même question pour $-12 \leq x \leq 1$ et $-3 \leq y \leq 4$
réponse : $-15 \leq x+y \leq 5$; $-16 \leq x-y \leq 4$; $-48 \leq xy \leq 36$
$\dfrac{x}{y}$ n'est pas défini pour $y=0$ et $\{\dfrac{x}{y};\quad -12 \leq x \leq 1 \text{ et } -3 \leq y \leq 4 \text{ et } y \neq 0\}$ est non borné,
$0 \leq \sqrt{x^2} \leq 12$
d) même question pour $3 \leq x \leq 4$ et $-5 \leq y \leq -3$
réponse : $-2 \leq x+y \leq 1$; $6 \leq x-y \leq 9$; $-20 \leq xy \leq -9$
$-\frac{4}{3} \leq \dfrac{x}{y} \leq -\dfrac{3}{5}$; $3 \leq \sqrt{x^2} \leq 4$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$\begin{array}{lll} a)|x+1|<0.1 & b)|x-2|>10 & c)|x|<|x+1| \\ d)|2x-1|<|x-1| & e)||x+3|-1| \leq 2 & f)\frac{x-1}{x+2} \geq 3 \\ g)\sqrt{x-3}-\sqrt{2x+1} \leq 4 & h)\sqrt{x^2-2x+3} \leq x-1 & \end{array}$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (on demande d'utiliser les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et non d'étudier les variations d'une fonction) :

$$\begin{array}{lll} a)\ |x-3|+|x+4| \leq 7 & b)\ 0 \leq \dfrac{x}{x^2-1} \leq 1 & c)\ \dfrac{x^3-1}{x+1} \leq x^2-x-1 \\ d)\ 0 \leq \sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1} \leq 1 & e)\ \sqrt{x^2-4x+4} \geq |\dfrac{3x}{2}-1| & \end{array}$$

Exercice 11. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{lll} |x+1| & < & \dfrac{5}{2} \\ \sqrt{x^2+x-2} & > & 1+\dfrac{x}{2} \end{array}\right.$$

Exercice 12. Démontrer les implications suivantes :

$$|x-2|<1 \Longrightarrow \left|\frac{x^3-3x+6}{x^2-16}\right|<6 \quad ; \quad |x| \leq 1 \Longrightarrow \left|\frac{x+\sin x}{x^7+x-3}\right| \leq 2$$

$$|x+1|<\frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\frac{(x^3+1)\sin(\frac{1}{x})+(x+1)\cos^3(1+e^x)}{4x+\sin(\frac{\pi x}{2})}\right|<\frac{23}{4}|x+1|$$

Exercice 13. Déterminer si les ensembles suivants sont bornés et en donner éventuellement des bornes.

$$\{\frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad ; \quad \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad ; \quad \{(-1)^n+\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$