Exercice 6. Comparer $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$, puis $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ et $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Exercice 7. Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x - a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a .

Exercice 8.

a) Soient x et y des réels tels que $-5 \leq x \leq 4$ et $-10 \leq y \leq -6$. Trouver les encadrements optimaux de $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{x}{y}$, et $\sqrt{x^2}$. Que peut-on dire de $\frac{1}{x}$?

b) même question pour $-7 \leq x \leq 9$ et $-2 \leq y \leq -1$

réponse : $-9 \leq x + y \leq 8$; $-6 \leq x - y \leq 11$; $-18 \leq xy \leq 14$

$-9 \leq \frac{x}{y} \leq 7$; $0 \leq \sqrt{x^2} \leq 9$

c) même question pour $-12 \leq x \leq 1$ et $-3 \leq y \leq 4$

réponse : $-15 \leq x + y \leq 5$; $-16 \leq x - y \leq 4$; $-48 \leq xy \leq 36$

$\frac{x}{y}$ n'est pas défini pour $y = 0$ et $\{\frac{x}{y}; -12 \leq x \leq 1 \text{ et } -3 \leq y \leq 4 \text{ et } y \neq 0\}$ est non borné,

$0 \leq \sqrt{x^2} \leq 12$

d) même question pour $3 \leq x \leq 4$ et $-5 \leq y \leq -3$

réponse : $-2 \leq x + y \leq 1$; $6 \leq x - y \leq 9$; $-20 \leq xy \leq -9$

$-\frac{4}{3} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{5}$; $3 \leq \sqrt{x^2} \leq 4$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$a) |x + 1| < 0.1$$

$$b) |x - 2| > 10$$

$$c) |x| < |x + 1|$$

$$d) |2x - 1| < |x - 1|$$

$$e) ||x + 3| - 1| \leq 2$$

$$f) \frac{x-1}{x+2} \geq 3$$

$$g) \sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$$

$$h) \sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (on demande d'utiliser les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et non d'étudier les variations d'une fonction) :

$$a) |x - 3| + |x + 4| \leq 7$$

$$b) 0 \leq \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1$$

$$c) \frac{x^3 - 1}{x + 1} \leq x^2 - x - 1$$

$$d) 0 \leq \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1} \leq 1$$

$$e) \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq \left| \frac{3x}{2} - 1 \right|$$

Exercice 11. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'inéquations

$$\begin{cases} |x + 1| < \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^2 + x - 2} > 1 + \frac{x}{2} \end{cases}$$

Exercice 12. Démontrer les implications suivantes :

$$|x - 2| < 1 \implies \left| \frac{x^3 - 3x + 6}{x^2 - 16} \right| < 6 \quad ; \quad |x| \leq 1 \implies \left| \frac{x + \sin x}{x^7 + x - 3} \right| \leq 2$$

$$|x + 1| < \frac{1}{2} \implies \left| \frac{(x^3 + 1) \sin(\frac{1}{x}) + (x + 1) \cos^3(1 + e^x)}{4x + \sin(\frac{\pi x}{2})} \right| < \frac{23}{4} |x + 1|$$

Exercice 13. Déterminer si les ensembles suivants sont bornés et en donner éventuellement des bornes.

$$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad ; \quad \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad ; \quad \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$