Correction : Suites récurrentes

Correction de l'exercice 04-05

a) Il suffit de vérifier le critère pour les suites proposées... par exemple

$$\alpha^{n+2} + a\alpha^{n+1} + b\alpha^n = \alpha^n P(\alpha) = 0$$

b) idem

c) Posons

$$F = \{(x\alpha^n + y\beta^n)_n, \quad x, y \in \mathbb{C}\}$$

On sait déjà, d'après ce qui précède, que

$$F \subset E$$

Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $u \in E$, alors soient $x, y \in \mathbb{C}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & u_0 \\ \alpha x + \beta y & = & u_1 \end{array} \right.$$

Un simple calcul, nous montre que

$$x = \frac{\beta u_0 - u_1}{\beta - \alpha} \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha u_0 - u_1}{\alpha - \beta}$$

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = x\alpha^n + y\beta^n$$

La propriété de recurrence au rang n étant $u_n = x\alpha^n + y\beta^n$
* Au rang n=0,1 c'est vérifié
* Supposons l'égalité vraie **jusqu'à** un certain rang $k \geq 2$:
Alors au rang $k+1$, on a

$$u_{k+1} = -au_k - bu_{k-1} = -a(x\alpha^k + y\beta^k) - b(x\alpha^{k-1} + y\beta^{k-1})$$

grâce à l'hypothèse de récurrence, d'où :

$$u_{k+1} = -\alpha^{k-1}(a\alpha + b)x - \beta^{k-1}(a\beta + b)y$$

Or $a\alpha + b = -\alpha^2$ et $a\beta + b = -\beta^2$, et donc

$$x\alpha^{k+1} + y\beta^{k+1}$$

l'égalité est donc vrai au rang k.
* Conclusion : On a donc montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = x\alpha^n + y\beta^n$$

d'où $u \in F$... CQFD

d) Lorsque P admet une racine double, on montre par un simple calcul que

$$(r^n) \in E \quad \text{et} \quad (nr^n) \in E$$

En remarquant que : $2r^2 + ar = 0$.
Et on en déduit

$$G \subset E$$

avec $G = \{(xr^n + ynr^n)_n, \quad x, y \in \mathbb{C}\}$.
L'inclusion réciproque est triviale dans le cas $r = 0$, et dans le cas $r \neq 0$, il suffit alors de prendre pour un $u \in E$ fixé, x et y tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u_0 \\ rx + ry & = & u_1 \end{array} \right.$$

e) ici le polynôme s'écrit

$$P(z) = z^2 - 2z - 3$$

ses racines sont 3 et -1 donc $u_n = x3^n + y(-1)^n$. Et le calcul de $u_0 = x + y$ et $u_1 = 3x - y$, nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n]$$

f) ici le polynôme s'écrit

$$P(z) = z^2 - 4z - 4$$

ici 2 étant racine double, u s'écrit $u_n = x2^n + yn2^n$. Et le calcul de $u_0 = x$ et $u_1 = 2x + 2y$, nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{n}{2}2^n$$

Correction de l'exercice 06-01

a) Soient 0 le centre du cercle trigonométrique puis A et M deux points de ce cercle formant un angle orienté de α. Il suffit alors de comparer l'aire du secteur angulaire $\widehat{OAM}$ avec celle du triangle OAM

b) la seule limite possible est 0

c) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [0, \pi/2]$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \sin(x_n) \leq x_n$$

Donc la suite étant décroissante minorée, elle converge... elle converge donc vers 0.

Correction de l'exercice 06-03

a) C'est une simple récurrence.

b) On voit que quelque soit $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_{n+1} + u_n} = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n+1} + u_n}$$

c) Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} + u_n > 0$, donc la différence $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, en particulier, puisque $u_1 - u_0 = 2 > 0$, la suite u est croissante.

d) Grace à la question a), on trouve :

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{4}(u_n - u_{n-1})$$

D'où par une simple récurrence, on trouve

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (u_2 - u_1)$$

En donc en sommant sur tous les indices n entre 2 et $k-1$, on trouve.

$$u_k - u_2 = \sum_{n=2}^{k-1}(u_{n+1} - u_n) \leq \left[\sum_{n=2}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right](u_2 - u_1) \leq \frac{1}{3}(u_2 - u_1)$$

Et ceci quelque soit $k \geq 3$, on a donc prouvé que la suite u est majorée, et donc elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
Et l vérifie par passage à la limite dans

$$\forall n \geq 2, \qquad u_{n+1}^2 = 4 + u_n \qquad \text{et} \qquad u_n \geq 2$$

$$l^2 = 4 + l \qquad \text{et} \qquad l \geq 2$$

D'où

$$l = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

Correction de l'exercice 06-04 Rappelons que $\sqrt[3]{x}$ est l'unique réel α qui vérifie $\alpha^3 = x$.
a) Par un calcul très facile on trouve

$$(x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3) \quad \text{et} \quad (x > y \Rightarrow x^3 > y^3)$$

D'où

$$x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$$

Ce qui se traduit par

$$x \leq y \Rightarrow \sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{y}$$

Ainsi la fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ étant croissante la croissance de f résulte du fait qu'elle est une composition de fonctions croissantes.
b) Soit l la limite éventuelle de u, alors puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} + 1)^3 = 1 + 3u_n$$

Par passage à la limite on obtient.

$$(l+1)^3 = 1 + 3l$$

ce qui revient à dire que l est racine du polynôme $P(X) = X^3 + 3X^2$, d'où

$$l = 0 \qquad \text{ou} \qquad l = -3$$

c) il va s'agir de discuter de la position relative de u_0 par rapport aux deux limites éventuelles 0 et -3. Or vu que f est croissante, on en déduit que

$$x \leq l \Longleftrightarrow f(x) \leq f(l) = l$$

Où $l = 0$ ou -3. Donc dans tous les cas de figure par une récurrence immédiate, on voit que si $u_0 \in I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in I$, où $I =]-\infty, -3]$ ou $[-3, 0]$ ou $[0, +\infty[$.

Par ailleurs, on voit par un calcul immédiat

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\infty, -3]$$

Ainsi on a

u_0	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, 0[$	0	$]0, +\infty[$
Monotonie	$\nearrow$	-3	$\searrow$	0	$\searrow$
Limite	-3	-3	-3	0	0

Justifions quelques-unes de ces limites :
Si $u_0 \leq -3$, on a vu que u est croissante et majorée par -3, donc convergente et sa limite l vérifie $l \leq -3$, d'où, $l = -3$.
Si $u_0 \geq 0$, le raisonnement est analogue.
Regardons ce qui se passe lorsque $-3 < u_0 < 0$, alors on sait que u est décroissante, donc convergente, d'où comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_0$$

par passage à la limite, on trouve que la limite l vérifie :

$$l \leq u_0 < 0$$

et donc $l = -3$.

Correction de l'exercice 06-05

a) f est décroissante, d'où :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0)$$

D'où le résultat.

b) par continuité, si u converge vers l alors :

$$l = 1 - l^2$$

Mais comme $u \geq 0$, on trouve aussi que $l \geq 0$, d'où la seule limite possible est :

$$l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

c) Calculons quelques termes de la suite.

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad u_1 = \frac{3}{4} \qquad u_2 = \frac{7}{16} \qquad u_3 = \frac{207}{256}$$

Soit v définie par

$$v_{n+1} = g(v_n) = 2v_n^2 - v_n^4$$

où $g = f \circ f$. On a alors.

$$v_{n+1} - v_n = 2(v_n^2 - v_{n-1}^2) - (v_n^4 - v_{n-1}^2) = (v_n^2 - v_{n-1}^2)[2 - (v_n^2 + v_{n-1}^2)]$$

Soit

$$v_{n+1} - v_n = (v_n - v_{n-1})(v_n + v_{n-1})[2 - (v_n^2 + v_{n-1}^2)]$$

*** Si** $v_0 = u_0$ alors on voit que $v = (u_{2n})$, on en déduit donc grâce à a), que :

$$(v_n + v_{n-1}) \geq 0 \quad \text{et} \quad [2 - (v_n^2 + v_{n-1}^2)] \geq 0$$

D'où $v_{n+1} - v_n$ est de signe constant donc du signe de $v_1 - v_0 = u_2 - u_0 < 0$, donc

$$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \searrow$$

*** Si** $v_0 = u_1$ alors on voit que $v = (u_{2n+1})$, on en déduit de la même facon que $v_{n+1} - v_n$ est de signe constant donc du signe de $v_1 - v_0 = u_3 - u_1 > 0$, donc

$$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$$

Donc les suites $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ étant monotones, bornées (puisqu'à valeurs dans $[0, 1]$) elles convergent leurs limite respectives λ et μ vérifiant :

$$\lambda = g(\lambda) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

idem pour μ.

Par un simple calcul on obtient λ, $\mu \in \{0,, l,\ 1\}$.

Or la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroit à partir de $1/2$ vers sa limite μ, d'où $\mu \leq 1/2 < l$. Soit

$$\mu = 0$$

De même$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ croit à partir de $3/4$ vers sa limite λ, d'où $\lambda \geq 3/4 > l$. Soit

$$\lambda = 1$$

Conclusion u ne converge pas.....

Correction de l'exercice 06-06

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1) = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2$$

Donc u est croisante....
Sa seule limite possible vérifie

$$l = \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}$$

donc $l = 1$.
Si $u_0 \leq 1$. on voit par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 1$$

Donc u étant croissante majorée, elle converge... vers 1 (sa seule limite possible)
Si $u_0 > 1$. et si par l'absurde on suppose que u converge. Alors sa limite l vérifie :

$$l \geq u_0 > 1$$

ce qui est absurde car la seule limite possible est 1... donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Correction de l'exercice 06-07 Avant d'aller plus loin remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$$

Ce qui nous permet de dire que la suite est bien définie.
En fait on a mieux (par une simple récurrence)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n$$

a) soit $\alpha > 0$ vérifiant

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

par un calcul simple on a $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.... c'est l'unique limite possible.
b)

$$u_{n+1} - \alpha = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - u_n}{\alpha u_n}$$

D'où grâce à la minoration par 1 de la suite u

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\alpha}|\alpha - u_n|$$

D'où par une recurrence facile

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n |\alpha - u_0|$$

comme $0 < 1/\alpha < 1$ le majorant tend vers 0, Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$